**Примеры решения индивидуальных задач И1-И5**

**Требования к оформлению.**

1. Все решения и исправления выполните в одной ученической тетради.
2. Для лучшей читаемости страницы тетради желательно нумеровать справа налево

|  |  |
| --- | --- |
| 2 | 1 |

1. Рисунки выполните крупно и по заданным размерам.
2. При несовместимости данных обращайтесь к лектору: Skype: torsor2751992, mob 8-901-300-4432: Алексей Владимирович).
3. Каждый пункт снабдите поясняющим текстом, как в примере.
4. Преобразования формул должны быть последовательными и понятными для стороннего читателя.

**Условия**

Тело из двух стержней (у Вас это может быть пластина) плотности $γ$, сваренных под углом $α$, вращается вокруг неподвижной вертикальной оси. Материальная точка массы m скользит без трения вдоль оси х.

**Данные для задач А, Б и В**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m (к*г*) | a(м) | 𝛼 (град) | 𝛾 (к*г*/м) | $\dot{φ}$ (c-1) | *x*0 (м) | $\dot{x}\_{0}$ (м/с) | $M\_{z}$ (нм) | $x(t)$ (м/с) |
| 1 | 2 | 60 | 1 | -1 | 1,5 | 1 | -t3 | $$1+t^{2}$$ |

Замечание: в условии может встретиться обозначение t3 эквивалентное t3

**Задача А**

*x*

О

φ

m

α

a

2a

Рис.1

Тело вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{φ}$.

Найти

1. Закон относительного движения точки *x* (t).
2. Положение относительного равновесия, если оно существует.

В момент, когда точка покидает тело, найти также

1. Скорость точки
2. Реакцию тела на точку.
3. Составляющие главного вектора реакций шарниров.

**И1. Решение задачи А с помощью основного уравнения динамики относительного движения**

1. Уравнение динамики относительного движения точки

P

Рис.2

$⨂$**ω**

$$v\_{e}$$

𝛽𝛽

$$⊙z$$

y

*x*

О

ω

m

α

a

$$v\_{r}=\dot{x}$$

*Фе*

*Фс*

*h*

***Ne***

$$mw\_{r}=mg+N+Ф\_{е}+Ф\_{с}$$

$$Ф\_{е}=mw\_{e}=mω^{2}h; Ф\_{сy}=-2m\dot{φ}\dot{x}$$

Знак $Ф\_{сy}$ легче определить при $\dot{φ, }\dot{x}>0$

Проектируя уравнение на ось *х* , получаем дифференциальное уравнение относительного движения точки

$$m\ddot{x}=Ф\_{е}Cosβ=mω^{2}hCosβ=mω^{2}(x-aCosα)$$

$$\ddot{x}-ω^{2}x=-aω^{2}Cosα$$

1. Положение относительного равновесия существует в точке Р, где $\ddot{x}=0$

$$x^{0}=aCosα=1м$$

Очевидно, что при $x\_{0}>x^{0}$ и $\dot{x}\_{0}>0$ точка будет удаляться от начала О координаты х. При $x\_{0}<x^{0}$ и $\dot{x}\_{0}<0$ точка будет приближаться к началу О координаты х. При заданных начальных условиях точка движется в направлении оси х.

1. Решение неоднородного уравнения

$$x=x\_{oo}+x\_{ч}$$

$$x\_{oo}=e^{λt}; λ^{2}-ω^{2}=0; λ\_{1,2}=\pm ω; $$

$$ x\_{oo}=C\_{1}e^{ωt}+C\_{2}e^{-ωt}$$

$$-ω^{2}x\_{ч}=-aω^{2}Cosα; x\_{ч}=aCosα $$

$$x=C\_{1}e^{ωt}+C\_{2}e^{-ωt}+ aCosα; \dot{x}=ωC\_{1}e^{ωt}-ωC\_{2}e^{-ωt}$$

Постоянные $C\_{1} C\_{2}$ находим из начальных условий

$$t=0: x\_{0}=1,5 м; \dot{x}\_{0}=1 м/с $$

$$x\_{0}=C\_{1}+C\_{2}+ aCosα; \dot{x}\_{0}=ω(C\_{1}-C\_{2})$$

$$\frac{\dot{x}\_{0}}{ω}+C\_{2}=C\_{1} x\_{0}=\frac{\dot{x}\_{0}}{ω}+2C\_{2}+ aCosα; $$

$$x\_{0}+\frac{\dot{x}\_{0}}{ω}-aCosα=2C\_{1} x\_{0}-\frac{\dot{x}\_{0}}{ω}-aCosα=2C\_{2} ; $$

Решение приобретает вид

$$x=(x\_{0}-aCosα)\frac{1}{2}\left(e^{ωt}+e^{-ωt}\right)+\frac{\dot{x}\_{0}}{ω}\frac{1}{2}\left(e^{ωt}-e^{-ωt}\right)$$

$$x=(x\_{0}-aCosα)chωt+\frac{\dot{x}\_{0}}{ω}shωt, x=0,5cht+sht$$

$$\dot{x}=0,5sht+chωt$$

1. Проекция основного уравнения на ось у:

$$0=N\_{y}+Ф\_{е}Sinβ+Ф\_{сy}; N\_{y}=2m\dot{φ}\dot{x}-m\dot{φ}^{2}hSinβ=m\dot{φ}(2\dot{x}-\dot{φ}aSinα)$$

Проекция основного уравнения на ось z:

$$0=N\_{z}-mg; N\_{z}=mg$$

Чтобы найти скорость вылета, в дифференциальном уравнении перейдем от переменной t к переменной x

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}=ω^{2}x-ω^{2}aCosα; \dot{x}d\dot{x}=\left(ω^{2}x-ω^{2}aCosα\right)dx$$

$$\dot{x}^{2}=ω^{2}x(x-2aCosα)+C\_{3}$$

Из начальных условий

$$C\_{3}=\dot{x}\_{0}^{2}+ω^{2}x\_{0}\left(2aCosα-x\_{0}\right)=1+1,5\left(2-1,5\right)=1,75 м^{2}/с^{2}$$

Скорость и нормальная реакция на выходе при $x\_{1}=2a=4м$

$$\dot{x}\_{1}=\sqrt{4\left(4-2\right)+1,75}=3,12 м/с$$

$$N\_{z}=mg=9,8 н; N\_{y}=m\dot{φ}\left(2\dot{x}\_{1}-\dot{φ}aSinα\right)=-(6,24+\sqrt{3})=-7,97 н$$

1. Составляющие реакции шарнира **R** найдем из теоремы о движении центра масс

$$R=Mw\_{c}$$

$ Mw\_{c}=M\_{1}w\_{c1}+M\_{2}w\_{c2}+mw=R\_{1}+R\_{2}+R\_{3}$

Рис.3

$⨂$**ω**

$$⊙z$$

О

α

a

$$R\_{3}^{r}$$

$$R\_{3}^{c}$$

*h*

$$R\_{3}^{e}$$

$$R\_{1}$$

$$R\_{2}$$

a

a

где $R\_{1}и R\_{2}$составляющие от ускорений центров тяжести стержней, а $R\_{3} $от ускорения точки. Последнее состоит из относительного, переносного и Кориолисова ускорений:

$$R\_{3}=R\_{3}^{r}+R\_{3}^{e}+R\_{3}^{c}=mw\_{r}+mw\_{e}+mw\_{c}$$

Направления составляющих изобразим на рисунке и вычислим их величину

$R\_{1}=γaω^{2}\frac{a}{2}$; $R\_{2}=γ2aω^{2}a\sqrt{2(1-Cosα)}$

$$R\_{3}^{e}=ma\sqrt{5-4Cosα;} R\_{3}^{r}=m\ddot{x}=maω^{2}(2-Cosα)$$

$$R\_{3}^{c}=mw\_{c}=2mωv\_{1}$$

**И3. Решение задачи А с помощью уравнения Лагранжа и теоремы об изменении кинетической энергии**

1. Методом Лагранжа получить дифференциальное уравнение относительного движения точки, найденное в И1.
2. С помощью теоремы об изменении кинетической энергии найти давление тела на точку в момент ее вылета с тела, и сравнить с результатом И1.

**Решение**

1. Найдем дифференциальное уравнение относительного движения точки из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{x}}-\frac{∂T}{∂x}=Q\_{x}, T=\frac{m}{2}v^{2}$$

Скорость складывается из переносной и относительной скоростей (Рис.2)

$$v^{2}=\dot{x}^{2}+v\_{e}^{2}+2\dot{x}v\_{e}Sinβ, v\_{e}=ωh, h=\sqrt{x^{2}+a^{2}-2xaCosα}$$

Таким образом кинетическая энергия

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^{2}+v\_{e}^{2}+2\dot{x}v\_{e}Sinβ\right)$$

Находим производные:

$$\frac{∂T}{∂\dot{x}}=m\left(\dot{x}+ωaSinα\right); \frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{x}}=m\ddot{x}; \frac{∂T}{∂x}=\frac{∂T\_{0}}{∂x}=mω^{2}\left(x-aCosα\right); $$

Обобщенная сила $ Q\_{x}=0$ поскольку силы тяжести перпендикулярны скоростям центров тяжести и не имеют мощности.

Подставив производные в уравнение Лагранжа приходим к тому же дифференциальному уравнению, что и в И1

$\ddot{x}-ω^{2}x=-aω^{2}Cosα$(1)

1. Найдем давление тела на точку из теоремы об изменении кинетической энергии точки.

$$\dot{T}=N$$

где N- мощность всех сил, приложенных к точке, в переносном вращательном движении и в движении вдоль оси х

$$N=N\_{φ}+N\_{x}$$

Сила тяжести m**g** не имеет мощности. Во вращательном движении мощность реакции вычисляем через момент силы

$$N\_{φ}=m\_{z}\left(N\_{y}\right)\dot{φ}; N\_{x}=Q\_{x}\dot{x}=0$$

Итак

$$\dot{T}=\frac{∂T}{∂\dot{x}}\ddot{x}+\frac{∂T}{∂x}\dot{x}=m\left(\dot{x}+ωaSinα\right)\ddot{x}+mω^{2}\left(x-aCosα\right)\dot{x}=-N\_{y}ω\left(x-aCosα\right)$$

Из дифференциального уравнения движения точки

$$\ddot{x}=ω^{2}(x-aCosα)$$

Таким образом, после сокращения на $ω\left(x-aCosα\right)$ находим тот же результат, что и в И1

тот же результат, что и в И1

$$N\_{y}=-mω\left(2\dot{x}+ωaSinα\right)$$

**Ответ задачи А**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1** | **2** | **3** | **4** |
| $$x=0,5cht+cht$$ | $$x^{0}=1м$$ | $$v\_{1}=3,12 м/с$$ | $$N\_{y}=-7,97 н$$ |

**Задача Б**

*x*

О

φ

М

α

a

2a

В

А

Рис.3

 Тело вращается из состояния покоя под действием момента $M\_{z}$. Точка массы m скользит по телу без трения по закону $x(t).$

Найти

1. Угловую скорость тела в момент, когда точка покидает тело.
2. Давление тела на точку в момент ее вылета с тела.
3. Момент, действующий на тело в задаче А при вылете точки.

**И2. Решение задачи Б с помощью теоремы об изменении кинетического момента.**

1. Кинетический момент системы складывается из кинетического момента стержней АОВ с зафиксированной на них в текущий момент точкой М и кинетического момента точки М в относительном движении (плечо $aSin∝)$.

$$K\_{z}= (J\_{AOB}+J\_{m} )\dot{φ}-m\dot{x}aSin∝$$

Последнее слагаемое отрицательно, поскольку при $\dot{x}>0$ момент относительной скорости направлен против $φ.$

$$J\_{AOB}=J\_{AO}+J\_{OB}=\frac{1}{3}m\_{AO}AO^{2}+\frac{1}{3}m\_{OB}\frac{OB}{4}^{2}+m\_{OB}AC^{2}=Const $$

C- центр стержня ОВ.

$$J\_{AOB}=\frac{1}{3}γa^{3}+\frac{1}{3}2γa^{3}+2аγ\left(a^{2}+a^{2}-2a^{2}Cosα\right)=\frac{8}{3}+\frac{16}{3}+4\left(4+4-4\right)=24 кгм^{2}$$

$$J\_{m}=mAM^{2}=m\left(a^{2}+x^{2}-2axCosα\right)=4+(1+t^{2})^{2}-2\left(1+t^{2}\right)=3+t ^{4} кгм^{2}; $$

$$J=J\_{AOB}+J\_{m}=27+t ^{4} кгм^{2}$$

Кинетический момент системы:

$$K\_{z}=\left(27+t ^{4}\right)\dot{φ}-2t\sqrt{3}$$

Интегрируем теорему об изменении кинетического момента

$$\dot{K\_{z}}= M\_{z}=-t^{3}; K\_{z}= -\frac{t^{4}}{4} $$

Иначе

$$\left(27+t ^{4}\right)\dot{φ}-2t\sqrt{3}=-\frac{t^{4}}{4}$$

$$\dot{φ}=\frac{8t\sqrt{3}-t^{4}}{4\left(27+t ^{4}\right)} $$

В момент, когда точка покидает тело.

$$x\_{1}=1+t\_{1}^{2}=2a; t\_{1}=\sqrt{3} c, \dot{φ}\_{1}=\frac{15}{144}=0,104 с^{-1}$$

1. Найдем давление тела на точку в момент ее вылета с тела. Связь между угловым ускорением тела, приложенным к нему моментом и давлением $N\_{y}$ точки на тело из дифференциального уравнения вращения тела.

$J\_{AOB}\ddot{φ}=M\_{z}+N\_{y}\left(x-aCos∝\right)$ (\*)

$$J\_{AOB}\ddot{φ}=-t^{3}+N\_{y}(x-1)$$

Дифференцируя закон угловой скорости $\dot{φ}$, получаем:

$$\ddot{φ}=\frac{-4t^{3}}{4\left(27+t ^{4}\right)}+\frac{4t^{7}}{4\left(27+t ^{4}\right)^{2}}=\frac{-27t^{3}}{\left(27+t ^{4}\right)^{2}}$$

При $t\_{1}=\sqrt{3} c$

$$\ddot{φ}\_{1}=\frac{-27\*3\sqrt{3}^{}}{\left(27+9\right)^{2}}=-\frac{81\sqrt{3}}{1296}=-0,108 c^{-2} \_{}$$

$$N\_{y}=\frac{t^{3}+J\_{AOB}\ddot{φ}}{x\_{1}-1}=\frac{3\sqrt{3}-24\*0,108}{3}=\frac{5,19-2,59}{3}=0,87 н$$

1. **В задаче А** из соотношения (\*)можно найти вращательный момент в момент вылета Равномерное вращение: $\dot{φ}=-1 с^{-1}$ $\ddot{φ}=0,$

при вылете точки с тела $x=4м$. По третьему закону Ньютона знак проекции давления точки на тело противоположен знаку проекции найденного в задаче А давления тела на точку:

$$ N\_{y}=7,97 н $$

Таким образом, в момент вылета к телу приложен момент

$$M\_{z}=-N\_{y}\left(x-aCos∝\right)=-3N\_{y}=-23,91 нм$$

Момент имеет отрицательное значение поскольку в задаче А отрицательна угловая скорость.

**И4. Решение задачи Б с помощью уравнения Лагранжа**

Методом Лагранжа найти закон изменения угловой скорости. Сравнить с результатом И2.
$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{φ}}-\frac{∂T}{∂φ}=Q\_{φ}$$

$$v\_{e}=h\dot{φ}$$

𝛽

$$⊙z$$

*x*

*x*

О

φ

M

α

a

$$v\_{r}=\dot{x}$$

*h*

y

Рис.4

$$T=T\_{AOB}+T\_{M}=\frac{J\_{AOB}}{2}\dot{φ}^{2}+ \frac{m}{2}v^{2}==12\dot{φ}^{2}+ \frac{m}{2}\left[\dot{x}^{2}+\dot{φ}^{2}\left(x^{2}+a^{2}-2xaCosα\right)-2\dot{x}\dot{φ}aSinα\right]$$

$$T=12\dot{φ}^{2}+\frac{1}{2}\left\{4t^{2}+\dot{φ}^{2}\left[\left(1+t^{2}\right)^{2}+4-2\left(1+t^{2}\right)\right]-4t\dot{φ}\sqrt{3}\right\}$$

Поскольку$ Q\_{φ}=M\_{z}=-t^{3}$ и $\frac{∂T}{∂φ}=0,$

$$ \frac{∂T}{∂\dot{φ}}=24\dot{φ}+\dot{φ}\left[3+t ^{4}\right]-2t\sqrt{3}=-\frac{t^{4}}{4}, $$

$$ $$

Приходим к тому же результату, что и в И2:

$$\dot{φ}=\frac{8t\sqrt{3}-t^{4}}{4\left(27+t ^{4}\right)}; \dot{φ}\_{1}=\frac{15}{144}=0,104 с^{-1}$$

Видим, что в данном примере кинетический момент системы связан с кинетической энергией формулой

$$\frac{∂T}{∂\dot{φ}}=K\_{z}$$

**Ответ задачи Б**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| $$\dot{φ}\_{1}=0,104 с^{-1}$$ | $$N\_{y}=0,87 н$$ | $$M\_{z}=-23,91 нм$$ |

**Задача В**

 Тело и точка движутся свободно. Координаты $φ$ и $x$ являются неизвестными функциями времени. Найти:

1. Дифференциальные уравнения движения системы методом Лагранжа.

**И5. Решение задачи В с помощью уравнений Лагранжа и теоремы об изменении кинетической энергии**

Составим дифференциальные уравнения движения системы с помощью уравнений Лагранжа. Система имеет 2 степени свободы. Выберем обобщенные координаты x и φ.

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{x}}-\frac{∂T}{∂x}=Q\_{x}; \frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{φ}}-\frac{∂T}{∂φ}=Q\_{φ}$$

Кинетическая энергия системы из И4

$$T=T\_{AOB}+T\_{M}=\frac{J\_{AOB}}{2}\dot{φ}^{2}+ \frac{m}{2}v^{2}=$$

$$=12\dot{φ}^{2}+ \frac{1}{2}\left[\dot{x}^{2}+\dot{φ}^{2}\left(x^{2}+4-2x\right)-2\dot{x}\dot{φ}\sqrt{3}\right]$$

Уравнение по х:

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{x}}=m\left(\ddot{x}-\ddot{φ}\sqrt{3}\right); \frac{∂T}{∂x}=m\left(x-1\right)\dot{φ}^{2}; Q\_{x}=0$$

Первое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}-\ddot{φ}\sqrt{3}=\left(x-1\right)\dot{φ}^{2}$$

***Проверяем***: При $\dot{φ}=-1=Const$ приходим к уравнению относительного движения точки, полученному ранее в**задаче А**

$$\ddot{x}-x=-1$$

Уравнение по $φ$:

$$\frac{∂T}{∂φ}=0; Q\_{φ}=0; $$

Поэтому $φ$- циклическая координата, которой соответствует циклический интеграл

$$\frac{∂T}{∂\dot{φ}}=\dot{φ}\left(28+x^{2}-2x\right)-\dot{x}\sqrt{3}=K\_{z}=Const $$

Интеграл выражает сохранение кинетического момента системы относительно оси z.

***Проверяем***: При $x=1+t^{2}$ получаем тот же закон угловой скорости

$$\left(27+t^{4}\right)\dot{φ}-2t\sqrt{3}=K\_{z}=Const $$

что и в задаче И2 при отсутствии момента.

Второе дифференциальное уравнение:

$$\ddot{φ}\left(28+x^{2}-2x\right)+2\dot{φ}\dot{x}\left(x-1\right)-\ddot{x}\sqrt{3}=0$$

Найдем давление тела на точку.

$$T\_{M}=\frac{1}{2}\left[\dot{x}^{2}+\dot{φ}^{2}\left(x^{2}+4-2x\right)-2\dot{x}\dot{φ}\sqrt{3}\right]=T\_{2}+T\_{1}+T\_{0}$$

Энергия $T\_{1}$ содержит $\dot{x}$ в первой степени

$$T\_{1}=-\dot{x}\dot{φ}\sqrt{3}$$

Энергия $T\_{0}$ содержит $\dot{x}$ в нулевой степени

$$T\_{0}=\frac{\dot{φ}^{2}}{2}\left(x^{2}+4-2x\right)$$

Мощность реакции в переносном движении точки

$$N\_{y}∙v\_{e}=\dot{T}\_{1}+2\dot{T}\_{0}-\frac{∂T}{∂t}$$

$$N\_{y}∙v\_{e}=N\_{y}\dot{φ}(x-1)$$

$$\dot{T}\_{1}=-\sqrt{3}(\ddot{x}\dot{φ}+\dot{x}\ddot{φ})$$

$$ 2\dot{T}\_{0}=2\dot{φ}^{2}\dot{x}(x-1); \frac{∂T}{∂t}=0$$

$$N\_{y}\dot{φ}\left(x-1\right)=-\sqrt{3}\left(\ddot{x}\dot{φ}+\dot{x}\ddot{φ}\right)+2\dot{φ}^{2}\dot{x}(x-1)$$

$$N\_{y}=2\dot{x}\dot{φ}-\frac{\sqrt{3}\left(\ddot{x}\dot{φ}+\dot{x}\ddot{φ}\right)}{\dot{φ}\left(x-1\right)}$$

***Проверяем***: В **задаче А:**  $\dot{φ}=-1=Const, \ddot{φ}=0 $

В момент вылета точки

$$x=4м, \dot{x}=3,12 м/с$$

$$\ddot{x}-ω^{2}x=-aω^{2}Cosα$$

$$\ddot{x}=4-1=3 м/с$$

Получаем ту же реакцию тела на точку

$$N\_{y}=-6,24-\sqrt{3}=-7,97 н$$

что и в задаче И3.

**Ответ задачи В**

|  |
| --- |
| $$\ddot{x}-\ddot{φ}\sqrt{3}=\left(x-1\right)\dot{φ}^{2}$$$$\ddot{φ}\left(28+x^{2}-2x\right)+2\dot{φ}\dot{x}\left(x-1\right)-\ddot{x}\sqrt{3}=0$$ |



3